OPCIÓN A

1..- a) Calcula todas las matrices 2 x 2 de la forma $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$ que satisfagan $\mathbf{A^2 = 0}$

(6 puntos)

a) Demuestra que las matrices del apartado anterior no son invertibles **(4 puntos)**

$a)$

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b & ab+bd \\ a+d & b+d^2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2+b & ab+bd \\ a+d & b+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a^2+b=0 \\ ab+bd=0 \\ a+d=0 \\ b+d^2=0 \end{cases}\Rightarrow d=-a\Rightarrow$$

$$b+(-a)^2=0\Rightarrow a^2+b=0\Rightarrow b=-a^2\Rightarrow b(a+d)=0\Rightarrow\begin{cases} b=0\Rightarrow 0=-a^2\Rightarrow a=0\Rightarrow d=0 \\ b\neq 0\Rightarrow b=-a^2\Rightarrow d=-a \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} Con\ b=0\Rightarrow A_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ Con\ b\neq 0\Rightarrow A_2=\begin{pmatrix} \lambda & -\lambda^2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \end{cases}$$

b)

Una matriz no tiene inversa si su determinante es nulo

$$\left.\begin{cases} Con\ b=0\Rightarrow |A_1|=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \\ Con\ b\neq 0\Rightarrow |A_2|=\begin{vmatrix} \lambda & -\lambda^2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2+\lambda^2=0 \end{cases}\right.\Rightarrow No\ existe\ A^{-1}$$

2.- Calcula la recta perpendicular al plano que pasa por los puntos **P_1(1 , 1 , 1)**, **P_2(0 , 2 , 1)** y **P_3(0 , 0 , -1)** y que pasa por el punto **O(0 , 0 , 0)** **(10 puntos)**

La recta **r** que queremos hallar esta determinada por el punto **O** y por el vector director del plano π que contiene a los tres puntos dados.

Para determinar el plano π hallaremos los vectores **P_1P_2, P_1P_3** y **P_1G**, siendo G el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **P_1G** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2}=(0\,,2\,,1)-(1\,,1\,,1)=(-1\,,1\,,0) \\ \overrightarrow{P_1P_3}=(0\,,0\,,-1)-(1\,,1\,,1)=(-1\,,-1\,,-2)\equiv(1\,,1\,,2) \\ \overrightarrow{P_1G}=(x\,,y\,,z)-(1\,,1\,,1)=(x-1\,,y-1\,,z-1) \end{cases}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$2\,(x-1)-(z-1)-(z-1)+2\,(y-1)=0\Rightarrow 2\,(x-1)+2\,(y-1)-2\,(z-1)=0\Rightarrow$$

$$(x-1)+(y-1)-(z-1)=0\Rightarrow \pi\equiv x+y-z-1=0\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\pi}=(1\,,1\,,-1)\Rightarrow r\equiv x=y=\frac{z}{-1}$$

3.- Calcular los máximos y mínimos relativos de la función $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x^2+2x+3}$ **(10 puntos)**

$$f'\left(x\right)=\frac{2\left(x^2+2x+3\right)-\left(2x+2\right)\left(2x+1\right)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=\frac{2\,x^2+4x+6-\left(4\,x^2+2x+4x+2\right)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=$$

$$f'\left(x\right)=\frac{2\,x^2+4x+6-4\,x^2-6x-2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=\frac{-2\,x^2-2x+4}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=-2\cdot\frac{x^2+x-2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$$

$$x^2+x-2=0\Rightarrow\Delta=1^2-4\cdot1\cdot\left(-2\right)=1+8=9\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1+3}{2}=1\\ x=\dfrac{-1-3}{2}=-2\end{cases}$$

$$f'\left(x\right)=-2\cdot\frac{\left(x+2\right)\left(x-1\right)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow f'\left(x\right)>0\Rightarrow\begin{cases}-2<0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x+2>0\Rightarrow x>-2\\ x-1>0\Rightarrow x>1\\ \left(x^2+2x+3\right)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$ **-1**	**-1** **2**	**2** ∞
- 2 < 0	**(-)**	**(-)**	**(-)**
x > -2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
$(x^2+2x+3)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**

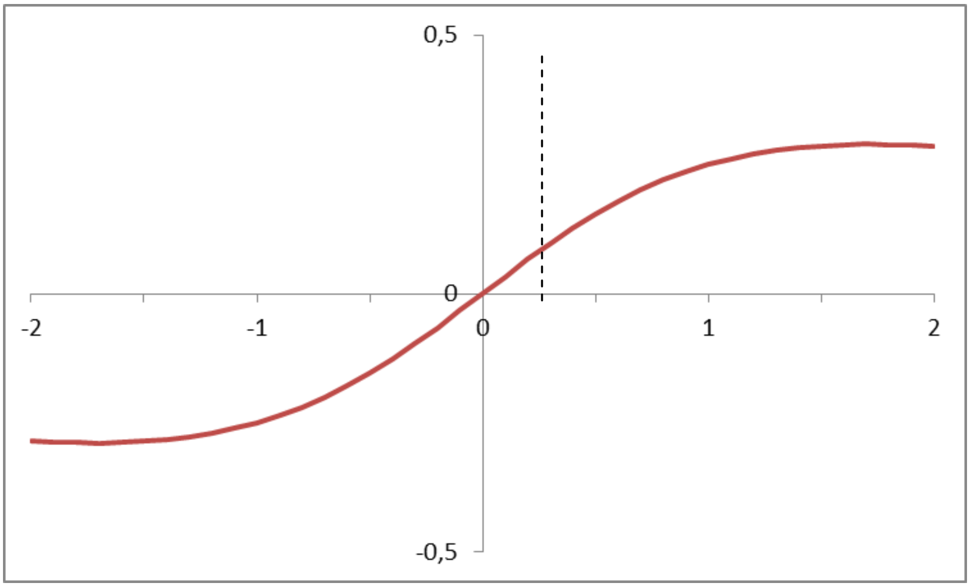
Crecimiento $\forall x\in\Re/-2<x<1$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/\left(x<-2\right)\cup\left(x>1\right)$

Mínimo relativo en $x=-2\Rightarrow f\left(-2\right)=\dfrac{2\cdot\left(-2\right)+1}{\left(-2\right)^2+2\cdot\left(-2\right)+3}=\dfrac{-3}{3}=-1$ (pasa de decrecimiento a crecimiento

Máximo relativo en $x=1\Rightarrow f\left(1\right)=\dfrac{2\cdot1+1}{1^2+2\cdot1+3}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ (pasa de crecimiento a decrecimiento

4.- Haz un dibujo del recinto limitado por la curva $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ entre los valores x = 0, x = 1 y el eje OX **(3 puntos).** Calcula el área de este recinto **(7 puntos).**

a)



b**)**

$$A=\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}\,dx=\int_3^4 \frac{1}{t}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int_3^4 \frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\cdot[\ln t]_3^4=\frac{1}{2}\cdot(\ln 4-\ln 3)=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{4}{3}=\ln\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{\frac{4}{3}}=\ln\frac{2}{\sqrt{3}}=$$

$$x^2+3=t\Rightarrow 2x\,dx=dt\Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1^2+3=4\\ x=0\Rightarrow t=0^2+3=3\end{cases}$$

$$A=\ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)u^2$$

OPCIÓN B

1..- a) Calcula la posición relativa de las rectas $r_1:\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ $r_2:\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

(5 puntos)

b) Calcular, si es el caso, o bien el punto de intersección o bien la recta perpendicular a estas dos y que las corte **(5 puntos)**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.
Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} r_1:\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ -x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow y+4z=-1 \Rightarrow y=-1-4z \Rightarrow x+(-1-4z)-z=0 \Rightarrow x=1+5z \\ r_2:\begin{cases} x+y=0 \\ -2x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow -x=-1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 1+y=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_1:\begin{cases} x=1+5\lambda \\ y=-1-4\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \\ r_1:\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+5\lambda=1 \\ -1-4\lambda=-1 \\ \lambda=\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda=0 \\ -4\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \mu=0 \Rightarrow$$

$$Se\ cor\tan\ en\ un\ punto\ o\ son\ coincidentes$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} \equiv (5\,,-4\,,1) \\ \overrightarrow{v_{r_{21}}} \equiv (0\,,0\,,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{0} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow No\ son\ coincidentes$$

$$Son\ \sec antes, se\ cor\tan\ en\ un\ punto$$

$b)$

$Punto\ de\ corte\ P$

$$P\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \Rightarrow P(1\,,-1\,,0) \\ z=0 \end{cases}$$

2.- a) Discutir la compatibilidad del siguiente sistema según el valor del parámetro **a**:

$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x+ay-az=0 \\ 3ax+6y-3z=-1 \end{cases}$$ **(6 puntos)**

b) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado **(4 puntos)**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & -a \\ 3a & 6 & -3 \end{vmatrix}=-3a-6a^2+6-3a^2+6a+6=-9a^2+3a+12 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -9a^2+3a+12=0 \Rightarrow$$

$$(-3)(3a^2-a-4)=0 \Rightarrow 3a^2-a-4=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-4)=1+48=49\geq 0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2\cdot 3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{1+7}{6}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3} \\ a=\dfrac{1-7}{6}=\dfrac{-6}{6}=-1 \end{cases}$$

$$(Para\ todo)\forall m\in\Re-\left\{-1\,,\frac{4}{3}\right\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$Si\ a=\frac{4}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow -3y=1 \Rightarrow y=-\frac{1}{3} \Rightarrow x-\frac{2}{3}+z=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}-z$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=\left(-\frac{1}{3}-\lambda\,,-\frac{1}{3}\,,\lambda\right)$$

Continuación del ejercicio 2 de la opción B

$b)$*Continuación*

$$Si\ a=\frac{4}{3}\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow 23y-7z=3\Rightarrow -2y=3+7z\Rightarrow y=-\frac{3+7z}{2}\Rightarrow x-(3+7z)+z=-1\Rightarrow$$

$$x=2+6z\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(2+6\mu\ ,-\frac{3+7\mu}{2}\ ,\ \mu\right)$$

3.- Sea **a** un valor real que se encuentra estrictamente entre **-1** y **1 (-1 < x < 1)**. Definimos la siguiente función en función de **a**: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x-3$. Demostrar que la función anterior solo se anula para un valor de **x** **(10 puntos)**

$$f'(x)=x^2+2ax+1\Rightarrow x^2+2ax+1=0\Rightarrow \Delta=(2a)^2-4\cdot 1\cdot 1=4a^2-4=4\left(a^2-1\right)\geq 0\Rightarrow$$

$$4\,(a-1)\,(a+1)>0\Rightarrow\begin{cases} 4>0\Rightarrow \forall x\in\Re \\ a-1>0\Rightarrow a>1 \\ a+1>0\Rightarrow a>-1 \end{cases}$$

	$-\infty$ **-1**	**-1** **1**	**1** ∞
4 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
a > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
a > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

El discriminante es **positivo** cuando $(a<-1)\cup(a>1)$, siendo **negativo** cuando $-1<a<1$ que es la condición determinada en el planteamiento del problema, por lo tanto, el valor de **x** de la expresión carece de soluciones reales, lo que implica que la función es monótona creciente en su dominio, que es **R**, independientemente del valor real de **a**.
Teniendo en cuenta que es una función polinómica de grado impar, y su recorrido es R, implica, necesariamente, que la función f(x) se anula en un solo punto de **x**

4.- Calcula la siguiente integral indefinida $\int x\sqrt[3]{4+x^2}\,dx$ **(10 puntos)**

$$I=\int x\sqrt[3]{4+x^2}\,dx=\int\sqrt[3]{4+x^2}\,x\,dx=\int\sqrt[3]{t^3}\cdot\frac{3}{2}t^2dt=\frac{3}{2}\int t\cdot t^2dt=\frac{3}{2}\int t^3dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^4}{4}=\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^4}$$

$$4+x^2=t^3\Rightarrow 2x\,dx=3\,t^2dt\Rightarrow x\,dx=\frac{3}{2}t^2dt$$

$$I=\frac{3}{8}\cdot\left(4+x^2\right)\sqrt[3]{4+x^2}+K$$